УДК 519.6:539.3

АЖУРНАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА БАЗЕ 10-УЗЛОВОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА [1)]

Д.Т. ЧЕКМАРЕВ, С.В. СПИРИН

Нижегородский государственный университет

E-mail: 4ekm@mm.unn.ru; spirinsergeyv@ya.ru

RARE MESH SCHEME BASED ON 10-NODES FINITE ELEMENT FOR 3D ELASTISITY PROBLEMS SOLVING

D.T. CHEKMAREV, S.V. SPIRIN

Nizhni Novgorod State University

Аннотация

Рассматривается ажурная схема решения трехмерных статических задач теории упругости на базе 10-узлового элемента в виде тетраэдра с квадратичной аппроксимацией перемещений в элементе. Расположение элементов с регулярными промежутками позволяет существенно повысить экономичность численной схемы при сохранении точности.

Ключевые слова: Трехмерная задача теории упругости, метод конечных элементов, ажурная схема

Summary

Rare mesh scheme for 3D elasticity theory problems based on 10-nodes finite element is considered. This scheme is more effective then traditional 10-nodes FEM scheme.

Key words: 3D elasticity theory problem, finite element method, rare mesh scheme.

Введение

В работах [1–3] рассмотрены принципы построения ажурных схем МКЭ и их реализация на базе 4-узловых линейных элементов для решения динамических и статических задач теории упругости и пластичности. Тестирование и верификация данных схем показала их высокую эффективность по сравнению с традиционными схемами на основе линейного 4-узлового и полилинейного 8-узлового конечных элементов. В данной работе рассматривается развитие идеологии ажурных схем на элементы более высокого порядка. Рассматривается реализация ажурной схемы решения трехмерных статических задач теории упругости на базе 10-узлового элемента с квадратичной аппроксимацией перемещений.

Описание схемы

В основе рассматриваемой схемы лежит традиционный 10-узловой элемент в виде тетраэдра с узлами в вершинах и на серединах ребер. Следуя [3], будем считать исходную КЭ сетку составленной из гексаэдров, а элементы – вписанными в центр каждого гексаэдра так, как представлено на рис. 1. Таким образом, в каждом гексаэдре базовой сетки находится один расчетный 10-узловой элемент. Незаполненный объем

[1)] Работа выполнена при поддержке гранта (соглашение от 27 августа 2013 г. № 02.B.49.21.0003 между МОН РФ и ННГУ)

гексаэдра, содержащиеся в нем масса и другие экстенсивные параметры задачи присоединяются к расчетному элементу. Рассмотрим элемент, вписанный в единичный куб. При этом координаты узлов в заданном порядке имеют следующие значения: (0,0,0), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (0.5,0.5,0), (0.5,0,0.5), (0,0.5,0.5), (1,0.5,0.5), (0.5,1,0.5), (0.5,0.5,1). Базисные функции в элементе примем в виде:

$$\varphi_1(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3-2)(x_1+x_2+x_3-1)$$

$$\varphi_2(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{2}(-x_1-x_2+x_3)(-x_1-x_2+x_3+1)$$

$$\varphi_3(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{2}(-x_1+x_2-x_3)(-x_1+x_2-x_3+1)$$

$$\varphi_4(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{2}(x_1-x_2-x_3)(x_1-x_2-x_3+1)$$

$$\varphi_5(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3-2)(-x_1-x_2+x_3) \quad .$$

$$\varphi_6(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3-2)(-x_1+x_2-x_3)$$

$$\varphi_7(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3-2)(x_1-x_2-x_3)$$

$$\varphi_8(x_1,x_2,x_3)=(-x_1-x_2+x_3)(-x_1+x_2-x_3)$$

$$\varphi_9(x_1,x_2,x_3)=(-x_1-x_2+x_3)(x_1-x_2-x_3)$$

$$\varphi_{10}(x_1,x_2,x_3)=(-x_1+x_2-x_3)(x_1-x_2-x_3)$$

При этом непрерывность поля перемещений сохраняется только на ребрах элементов.

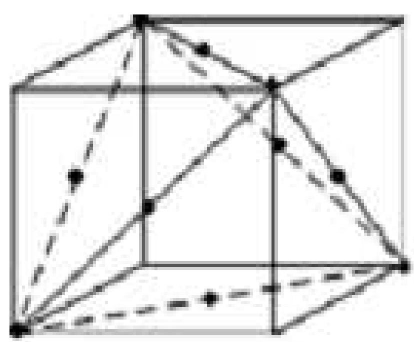

Рис. 1: Расположение элемента ажурной сетки

Задача теории упругости формулируется в виде вариационного уравнения (принципа виртуальных перемещений)

$$\int\limits_V \sigma_{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\;dV=\int\limits_V \rho F_i\,\delta u_i\,dV+\int\limits_{S_p} P_i\,\delta u_i\;dS, \tag{1}$$

где V — объем упругого изотропного тела, на некоторой части границы S_p которого заданы поверхностные нагрузки; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений; ε_{ij} — компоненты линейного тензора деформаций; u_i — компоненты вектора перемещений; F_i и P_i — компоненты соответственно массовых и поверхностных нагрузок, ρ — плотность. Перемещения, углы поворота, деформации считаются малыми

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,\,i}), \tag{2}$$

деформации связаны с напряжениями законом Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda\,\delta_{ij}\,\varepsilon_{kk} + 2\,\mu\,\varepsilon_{ij}, \tag{3}$$

где λ и μ — параметры Ламе.

Как это принято в МКЭ [4], будем использовать матрично-векторную форму записи соотношений. Вектор узловых перемещений конечного элемента обозначим

$$u^T = (u_1^1, u_1^2, u_1^3, \ldots, u_{10}^1, u_{10}^2, u_{10}^3), \tag{4}$$

векторы компонент линейного тензора деформаций и напряжений (в силу симметрии рассматриваются только шесть компонент) соответственно

$$(\varepsilon)^{\mathrm{T}} = (\varepsilon_{11},\ \varepsilon_{22},\ \varepsilon_{33},\ \gamma_{12},\ \gamma_{23},\ \gamma_{31}), \tag{5}$$

$$(\sigma)^{\mathrm{T}} = (\sigma_{11},\ \sigma_{22},\ \sigma_{33},\ \sigma_{12},\ \sigma_{23},\ \sigma_{31}), \tag{6}$$

В матричной форме соотношения Коши (2), закон Гука (3) и полная потенциальная энергия отдельного элемента могут быть записаны в виде

$$(\varepsilon) = (B)\,(u), \tag{7}$$

$$(\sigma) = (C)\,(\varepsilon) = (C)\,(B)\,(u), \tag{8}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\,(u)^{\mathrm{T}}\,(K)\,(u) - (u)^{\mathrm{T}}\,(q), \tag{9}$$

где (B) — матричный дифференциальный оператор, (C) — матрица упругих постоянных, (K) — матрица жесткости элемента $(K) = \int_{V_i} (B)^{\mathrm{T}}\,(!)\,(B)\ dV$, (q) — вектор узловых сил, статически эквивалентный действующим на элемент распределенным массовым и поверхностным силам.

Условие стационарности (1) энергетического функционала приводит к системе линейных алгебраических уравнений равновесия тела, которая модифицируется с учетом граничных условий по перемещениям. Решая получающуюся систему относительно перемещений прямым или итерационным методом, определяются узловые перемещения всей расчетной области и по формулам (7) и (8) вычисляются компоненты тензоров деформаций и напряжений.

Рассмотренная схема представляется весьма перспективной. По сравнению с традиционной схемой 10-узлового конечного элемента она имеет в 2 раза меньше узлов и в 5 раз меньше элементов. Проводя аналогию с ажурными схемами на основе линейного элемента, есть также все основания утверждать, что ее сходимость должна быть не хуже, чем у традиционной схемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Чекмарев Д.Т.** Численные схемы метода конечного элемента на «ажурных» сетках // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. — 2009. — Вып. 2. — С. 49–54.
2. **Жидков А.В., Зефиров С.В., Кастальская К.А. Спирин С.В., Чекмарев Д.Т.** Ажурная схема численного решения трехмерных динамических задач теории упругости и пластичности // Вестник ННГУ. — 2011. — № 4. — С. 1480–1482.
3. **Жидков А.В., Спирин С.В., Чекмарев Д.Т.** Ажурная схема метода конечных элементов решения статических задач теории упругости // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. — 2012. — Т. 154, Кн 4. — С. 26–32.
4. **Голованов А.И., Бережной Д.В.** Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел. — Казань: Изд-во «ДАС», 2001. — 301 с.

REFERENCES

1. **Chekmarev D.T.** Finite element numerical schemes on rare meshes [Chislennye schemy metoda konechnogo elementa na «azhurniyh» setkah] // Voprosi atomnoy nauki, Ser. Matematicheskoye modelirovanie physicheskikh processov. – 2009. – Is. 2. – P. 49–54. (in Russian)
2. **Zhidkov A.V., Zefirov S.V., Kastalskaya K.A., Spirin S.V., Chekmarev D.T.** The rare mesh numerical scheme for 3D dynamic elasticity and plasticity problems solution [Azhurnaya schema chislennogo resheniya trekhmernikh dynamicheskikh zadach teorii uprugosty i plastichnosty] // Vestnik of Lobachevsky state university of Nizhni Novgorod. – 2011. – № 4(4). – P. 1480–1482. (in Russian)
3. **Zhidkov A.V., Spirin S.V., Chekmarev D.T.** The Rare Mesh Finite Element Scheme for Static Elasticity Problems Solving [Azhurnaya schema metoda konechnykh elementov resheniya staticheskikh zadach teorii uprugosty] // Ucenye zapiski Kazan university. Ser. physico-mathematicheskiye nauki. – 2012. – V. 154, Is 4. – P. 26–32. (in Russian)
4. **Golovanov A.I., Berezhnoj D.V.** Finite element method in solid mechanics [Metod konechnyh elementov v mehanike deformiruemyh tverdyh tel]. – Kazan: «DAS» publishing, 2001. – 301 p. (in Russian)